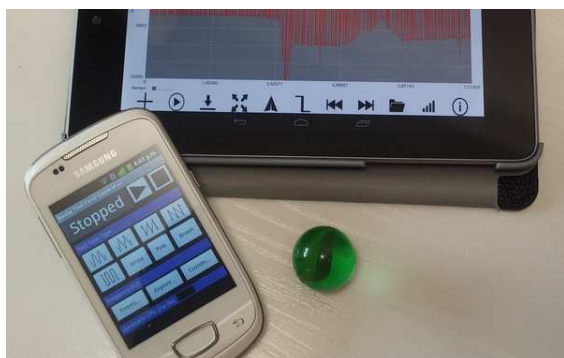


## 12 El coeficiente de restitución en los choques

En este experimento clásico (Aparicio y Lozano, 2002) se calcula del coeficiente de restitución de una bola al rebotar en el suelo. Se deja caer una bola y se graba el sonido que produce al chocar repetidamente con el suelo en los sucesivos rebotes, que van perdiendo altura como consecuencia básicamente de la pérdida de energía en cada choque.



El coeficiente de restitución da indirectamente una idea de la pérdida de energía que se produce en cada choque y se puede medir de diferentes maneras, por ejemplo: como el cociente entre los tiempos que tardan en producirse dos rebotes sucesivos. La tableta registra los choques y con la aplicación se pueden medir los tiempos que se necesitan para realizar los cálculos.

### Aplicaciones y material a utilizar

Ciencia Móvil - AudioTime+	
	
<a href="https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.ius.audiotimeplus">https://play.google.com/store/apps/details?id=edu.ius.audiotimeplus</a>	

La aplicación que se utilizará en este experimento es **Ciencia Móvil - AudioTime +** que como ya hemos visto repetidamente es una app magnífica que permite registrar la entrada de sonido y medir tiempos.

Paralelamente a la creación de aplicaciones para tabletas y teléfonos móviles, los autores de la

aplicación (Wisman y Forinash, 2013e) han elaborado también una propuesta experimental en la que se basa este protocolo.

También se necesita una canica (o una pelota o un balón...) que haga ruido al chocar contra el suelo.

Alternativamente se puede usar la aplicación **PhyPhox** que tiene un experimento preparado expresamente para calcular la energía perdida en cada uno de los sucesivos rebotes de la pelota. El resultado es espectacular, pero yo no la utilizo para esto porque actúa como una caja negra que no ayuda a saber cómo se ha llegado a los valores.

PhyPhox	
	
<a href="https://play.google.com/store/apps/details?id=de.rwth_aachen.phyphox&amp;hl=es">https://play.google.com/store/apps/details?id=de.rwth_aachen.phyphox&amp;hl=es</a>	

### El coeficiente de restitución en el choque

En cualquier choque, los cuerpos sufren una deformación y se liberan pequeñas cantidades de energía en forma de calor, pero si consideramos el caso ideal de la colisión perfectamente elástica entre dos objetos de masas,  $m_1$  y  $m_2$ , que se mueven en la misma dirección, la energía cinética y la cantidad de movimiento totales se conservan, es decir, la ecuación de la conservación de la energía cinética en el choque es:

$$\frac{1}{2} m_1 v_a^2 + \frac{1}{2} m_2 u_a^2 = \frac{1}{2} m_1 v_b^2 + \frac{1}{2} m_2 u_b^2$$

Donde  $v_a$  y  $v_b$  son las celeridades del objeto 1 antes y después del choque y  $u_a$  y  $u_b$  son las de la masa 2 también antes y después

La ecuación de la conservación de la cantidad de movimiento en el choque es:

$$m_1 v_a + m_2 u_a = m_1 v_b + m_2 u_b$$

Si se combinan linealmente las dos ecuaciones se obtiene esta:

$$V_a + V_b = U_a + U_b$$

Que también se puede escribir

$$V_a - U_a = - (V_b - U_b)$$

La fórmula anterior implica que, en el caso ideal de un choque perfectamente elástico en una dirección, la velocidad relativa antes de chocar,  $v_a - u_a$ , es igual a la velocidad relativa después del choque cambiada de signo,  $-(v_b - u_b)$ . Pero si en el choque hay pérdidas energéticas (es decir, siempre), la velocidad relativa después del choque es más pequeña y la ecuación se puede escribir:

$$e (v_a - u_a) = - (v_b - u_b)$$

Donde  $e$  es un coeficiente, llamado de restitución, que mide indirectamente la proporción de energía perdida en el choque:

$$e = - \frac{V_b - U_b}{V_a - U_a} = \frac{V_b - U_b}{U_a - V_a}$$

Al analizar esta ecuación se pueden hacer las siguientes consideraciones:

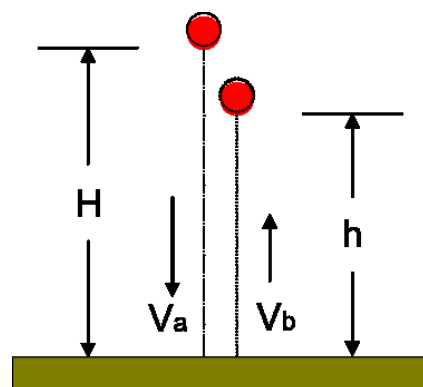
1. Si el choque es completamente elástico, las velocidades relativas antes y después son iguales y el coeficiente de restitución es igual a 1,  $e = 1$ .
2. Si el choque es totalmente inelástico, ambos cuerpos continúan juntos después del choque (misma celeridad),  $(v_b - u_b) = 0$  y el coeficiente de restitución es igual a 0,  $e = 0$ .
3. En los demás casos,  $e$  es un número entre cero (0) y uno (1).

Además, si uno de los cuerpos que chocan es tan masivo que, estando inicialmente quieto respecto al sistema de referencia que consideramos, después del choque no se mueve, su celeridad es siempre cero y la ecuación del coeficiente de restitución queda en este caso:

$$e = - \frac{V_b - U_b}{V_a - U_a} = - \frac{V_b}{V_a}$$

Es decir, que  $e$  no depende más que de las celeridades antes y después del propio cuerpo, al que se le puede atribuir este valor de  $e$  como propiedad suya. Así, el coeficiente de restitución ( $e$ )

para un material se define como la relación de la velocidad de un objeto de ese material antes y después de una colisión con una superficie dura.



Esquema del rebote de una pelota para calcular el coeficiente de restitución

En el dibujo de arriba se representa una pelota que se deja caer desde una altura,  $H$ , rebota con el suelo y llega otra vez hasta una altura menor,  $h$ . Se utilice el convenio de signos que sea, siempre las velocidades de la pelota antes y después del choque tendrán signos contrarios, por lo tanto:

$$e = - \frac{-V_b}{V_a} = \frac{V_b}{V_a}$$

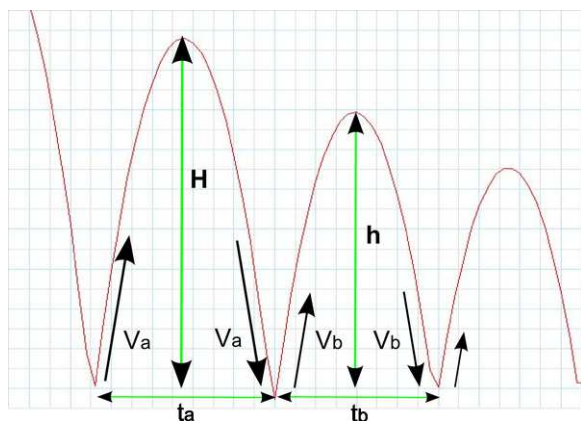
Como hemos argumentado antes, si la colisión es perfectamente elástica, es decir, si se conserva la energía en el choque, las dos velocidades tendrán el mismo módulo y será  $e = 1$ , y si el choque es perfectamente inelástico, es decir, si el objeto se pega a la superficie después de la colisión, el  $e = 0$ .

El coeficiente de restitución ( $e$ ), pues, se puede determinar por el rebote sobre una superficie dura de un objeto del material que se quiere estudiar.

Las pelotas de golf suelen tener un  $e = 0,78$ , las pelotas de baloncesto tienen un  $e = 0,81$  hasta  $0,85$  y las pelotas de tenis tienen un  $e = 0,89$  hasta  $0,91$ . Las bolitas de vidrio pueden tener un  $e$  de hasta  $0,95$  (siempre que no se deformen y/o se rompan con el impacto).

El coeficiente de restitución de otros objetos como raquetas de tenis y palos de golf se puede determinar por el rebote de una esfera dura sobre ellos. Así, las raquetas de tenis tienen un  $e$  de aproximadamente  $0,85$  y los palos de golf de  $0,83$ .

Medir directamente la velocidad de las pelotas antes y después de botar es muy complicado. Más fácil es calcular el coeficiente de restitución a partir del tiempo entre rebotes o a partir de la determinación de la altura  $H$  desde la que se deja caer el objeto y la altura  $h$  a la que llega al rebotar. Veamos en estos casos como es la ecuación que permite calcular el coeficiente de restitución.



Rebotes de una pelota sobre una superficie dura

En el diagrama de arriba que representa la posición en función del tiempo de un balón que saltando y rebotando sobre una superficie dura,  $V_a$  es la velocidad después del primer bote,  $V_b$  es la velocidad después del segundo bote,  $H$  es la altura del primer bote y  $h$  es la altura del segundo bote. Si despreciamos la resistencia del aire,  $V_a$  es también la velocidad de la pelota justo antes del segundo bote. El primer rebote tarda un tiempo  $t_a$  y el segundo rebote tarda un tiempo  $t_b$ .

Como el movimiento de caída del balón es el de caída libre, se puede calcular la celeridad en el momento del impacto con el suelo a partir de la ecuación  $v = g \cdot t$ , siendo  $t$  el tiempo de caída del balón desde el punto más alto de la trayectoria, es decir, la mitad del tiempo entre choque y choque.

Para calcular el coeficiente de restitución en función del tiempo es suficiente hacer el cociente entre dos tiempos sucesivos:

$$e = \frac{V_b}{V_a} = \frac{\frac{1}{2}gt_b}{\frac{1}{2}gt_a} = \frac{t_b}{t_a}$$

Si se quiere calcular la celeridad del balón justo antes del choque en función de la altura, se debe utilizar otra ecuación del movimiento uniformemente acelerado, o bien el principio de conservación de la

energía mecánica: la energía potencial arriba del todo será igual a la energía cinética abajo:

$$\frac{1}{2}mV^2 = mgh$$

Despejando la velocidad  $V_a$ , que es la velocidad final que adquiere el balón en caída libre desde la altura  $H$  se tiene:

$$V_a = \sqrt{2gH}$$

Y para  $V_b$ :

$$V_b = \sqrt{2gh}$$

El coeficiente de restitución en función de la altura será:

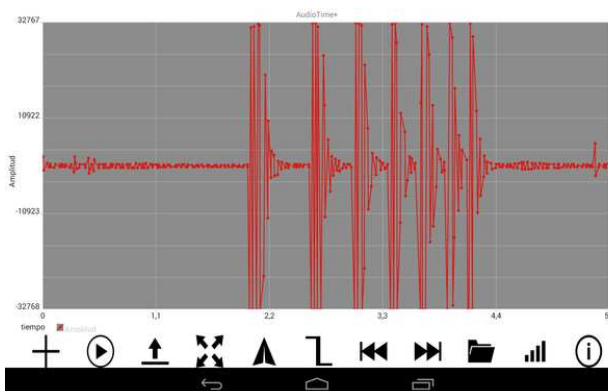
$$e = \frac{V_b}{V_a} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{2gH}} = \sqrt{\frac{h}{H}}$$

### Realización / procedimiento

Mediremos el coeficiente de restitución ( $e$ ) del choque de una canica en el suelo de la clase en función del tiempo entre botes. Para ello, dejaremos caer la canica desde una altura cualquiera y grabaremos con la aplicación AudioTime+ los ruidos que hace al rebotar contra el suelo. Después se mide el tiempo entre dos choques sucesivos y se calcula el coeficiente.

Se inicia la app AudioTime+ y se pulsa el botón inicio (+) para comenzar a grabar. Se deja caer la canica y que rebote varias veces. A continuación se detiene la grabación pulsando el botón parar (||).

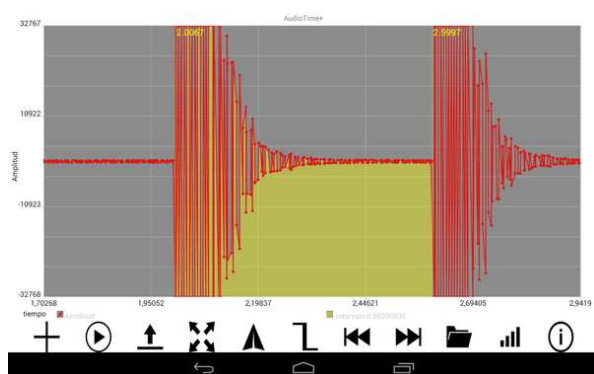
Si se quiere, se puede guardar la grabación pulsando el botón de la carpeta y dándole un nombre. Se guarda en la carpeta Audiotime+.



Los rebotes de una canica con el suelo

Aparecerá una gráfica como la de la figura siguiente donde se ven las perturbaciones sonoras producidas por los sucesivos choques en el suelo de la canica. Se deben marcar en la pantalla dos momentos sucesivos en los que se inicia el ruido del choque. Esto se puede hacer de dos maneras:

1. Se pulsa con el dedo en los dos puntos que se considere. Si se produce una equivocación, se puede mover la posición arrastrando la marca con el dedo. Si las señales de los choques están muy juntas, previamente se pueden separar/ampliar separando dos dedos en la pantalla.



Captura de pantalla de AudioTime+ que muestra el intervalo entre el primer y el segundo bote

2. Si se pulsa el botón punta de flecha ( $\Delta$ ) se ubicará una línea en el primer bote, el que tiene la señal más fuerte, en la parte más alta de la señal. Si se ven en pantalla varios rebotes, se deben ampliar las señales utilizando dos dedos hasta que sólo sean visibles dos choques en la pantalla. A continuación se vuelve a pulsar el botón ( $\Delta$ ) y aparecerá una segunda línea en la segunda cresta.

En cualquiera de los dos casos, aparece el valor del tiempo entre las dos señales en la parte inferior derecha de la pantalla. A este tiempo le diremos  $t_a$ .

Para volver a ver todo lo que hemos grabado se debe pulsar el botón con cuatro flechas. Si ahora se hace un doble toque en la pantalla eliminaremos las dos líneas amarillas de la primera medida. Se pueden repetir los pasos anteriores para encontrar el tiempo entre el segundo y el tercer rebote. Este nuevo tiempo es  $t_b$ . A continuación se puede seguir el proceso con  $t_c$ ,  $t_d$  ...

Ahora ya se puede encontrar el coeficiente de restitución dividiendo el tiempo segundo por el primero:  $e = t_b/t_a$ .

## Observaciones

- \* Se puede llenar una tabla con los valores de tiempo recogidos y calcular el valor del coeficiente de restitución para cada par de datos. Después se pueden analizar los valores obtenidos y ver si están todos dentro del mismo rango o se produce un salto en los valores a partir de un determinado rebote. Si los valores de los coeficientes en cada bote están dentro del mismo rango, se puede calcular el valor más probable y su incertidumbre.

- \* Dependiendo del material de la bola que se deja caer se puede encontrar que el valor del coeficiente de restitución sea prácticamente igual desde el primer bote, como en una pelota de baloncesto, pero hay otros materiales, como el de algunas bolas de vidrio, que en los primeros saltos se deforman mucho más que en los siguientes cuando el choque es menos violento, y eso no lo hacen gradualmente sino sufriendo un cambio brusco del valor del coeficiente a partir de un bote determinado.

- \* Como la experimentación es muy rápida de hacer, es fácil repetirla varias veces, aunque luego tomar los datos de cada experimento sea más lento, de manera que se puede volver a hacer el experimento con una bola del mismo o de otro material para estudiar si los resultados son equiparables.

- \* La realización de estos experimentos en las aulas de secundaria no es una novedad. La novedad está en las herramientas utilizadas y en que el alumnado dispone de ellas y puede hacer la experimentación autónomamente y en su casa. Por ejemplo se puede calcular el coeficiente de restitución con un ordenador, un micrófono y el programa **Audacity**.

Otra forma para obtener los datos pasa por grabar los botes del balón en vídeo con el teléfono (o con una cámara fotográfica, o una cámara web, o una videocámara) y medir los tiempos después con el magnífico programa **VLC Media Player**.

Si se tiene la suerte de disponer de un sensor de distancia se puede hacer el experimento siguiendo el protocolo del CDEC *Energía disipada en el bote de una balón* (Aparicio y Lozano, 2002), donde se calcula el coeficiente a partir de las sucesivas alturas alcanzadas por el balón.